第一章　　信号分析基础

信号的概念：信号是某一特定信息的载体，它包含着反映被测物理系统的状态或特性的某些信息。

1-1信号的分类

一、根据信号的物理性质分为非电信号和电信号。

非电信号：随时间变化的力、位移、速度等信号

电信号：随时间变化的电流、电压、磁通等信号。

非电信号和电信号可以借助于一定的装置互相转换。在实际中，对被测的非电信号通常都是通过传感器转换成电信号，再对此电信号进行测量。

二、按信号在时域上变化的特性分：静态信号和动态信号。

1、静态信号：在测量期间内其值可认为是恒定的信号；

2、动态信号：指瞬时值随时间变化的信号。

一般信号都是随时间变化的时间函数，即为动态信号。

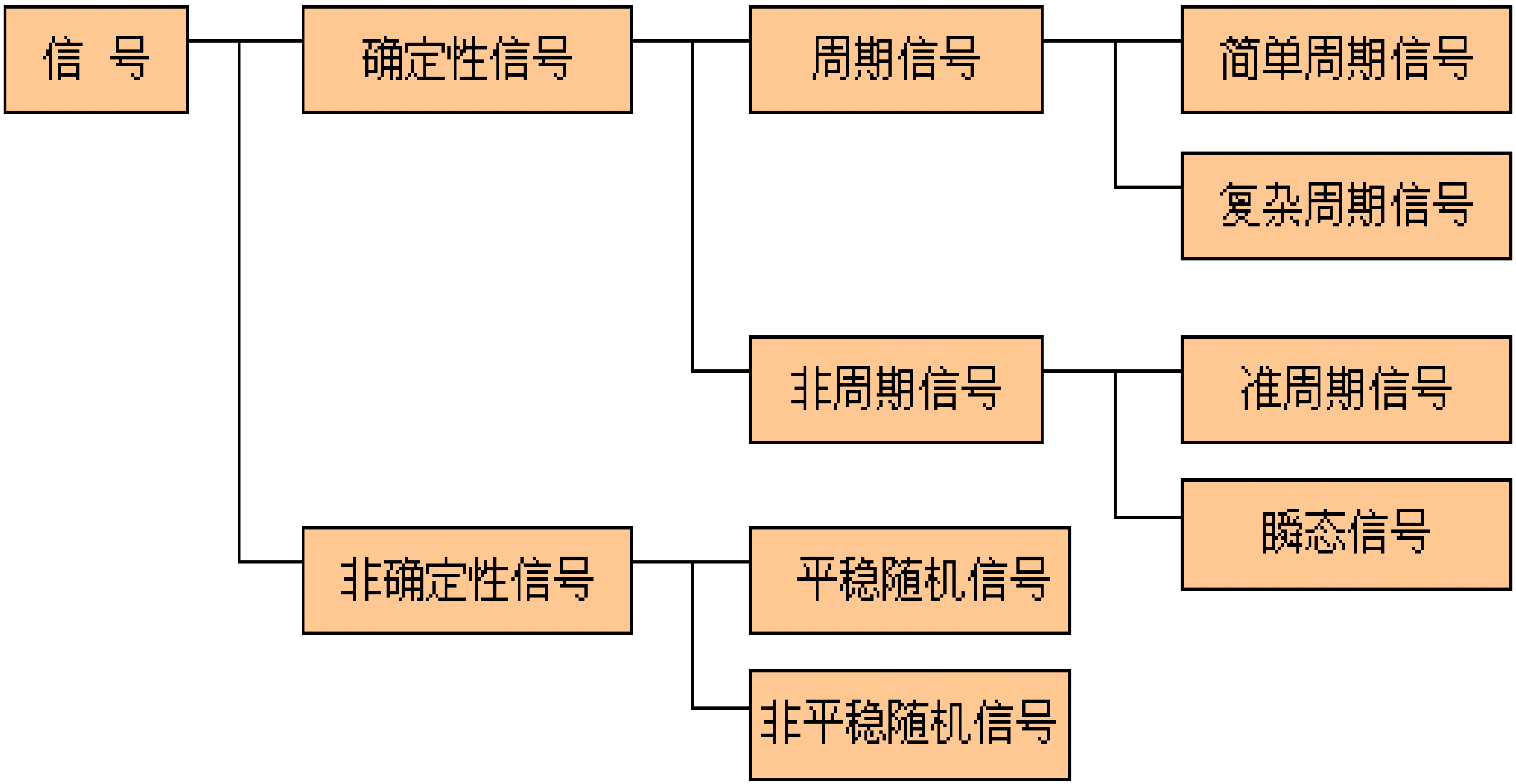
动态信号又可根据信号值随时间变化的规律细分为确定性信号和随机信号。

确定性信号又分为周期信号和非周期信号。

非周期信号又分为准周期信号和瞬变非周期信号。

非确定性信号(随机信号)又分为平稳随机信号和非平稳随机信号。

信号的分类：


信 号
确定性信号
周期信号
简单周期信号
复杂周期信号
非周期信号
准周期信号
瞬态信号
非确定性信号
平稳随机信号
非平稳随机信号

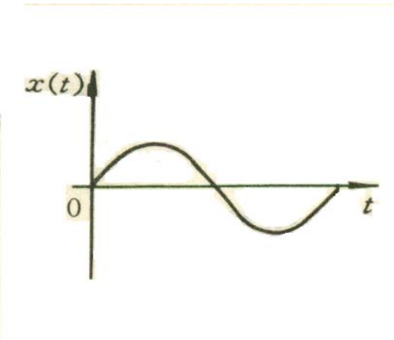
三、按信号取值情况分：连续信号和离散信号。

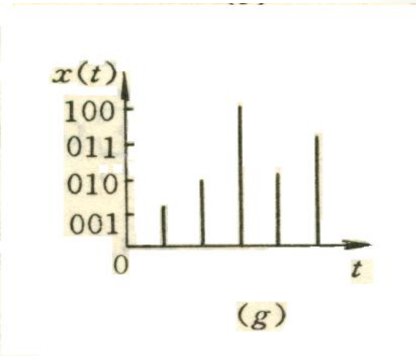
1、连续信号：信号的数学表达式中的独立变量取值是连续的；

2、离散信号：信号的独立变量取离散值，不连续。

连续信号与离散信号的联系：

将连续信号等时距采样后的结果就是离散信号。





1-2信号的描述

一、时域描述：人们直接观测或记录的信号一般是随时间变化的物理量，以时间作为独立变量的描述方法。它的特点是：只能反映信号的幅值随时间变化的规律。从时域图形中可以知道信号的周期、峰值和平均值等，可以反映信号变化的快慢和波动情况，比较直观、形象，便于观察和记录。

$$x(t)=2t$$

二、频域描述：是以频率作为独立变量而建立的信号与频率的函数关系。它的特点是：研究信号的频率结构，即组成信号的各频率分量的幅值及相位的信息。

$$y(\omega)=2\tau\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}$$

二者的关系：它们是从不同的侧面观察，二者之间有着密切的关系且互为补充。我们之所以要对信号做不同域中的分析和描述，是因为我们分析一个信号所要解决的问题不同，所需要掌握信号的不同方面的特征。

三、信号的时域描述方法：

1、确定性信号：指可以精确地用明确的数学关系式描述的信号，它可用一个确定的时间函数，按它的波形是否有规律的重复，还可分为周期性信号和非周期性信号。

(1)周期性信号：是按一定周期重复出现的信号，可用数学表达式表示为：

$$x(t) = x(t + nT)$$

其中：$n=\pm 1,\pm 2,\pm 3\ldots\ldots$

T 为周期

例如：正弦信号的时域描述为：

$$\sin \omega t = \sin(\omega t + 2n\pi)$$

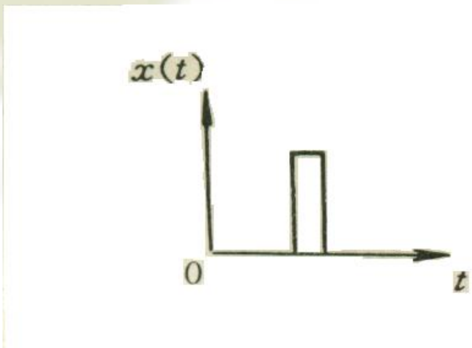
(2)非周期性信号：指不具有周期性重复的信号称为非周期性信号。又分为准周期信号和瞬变非周期信号

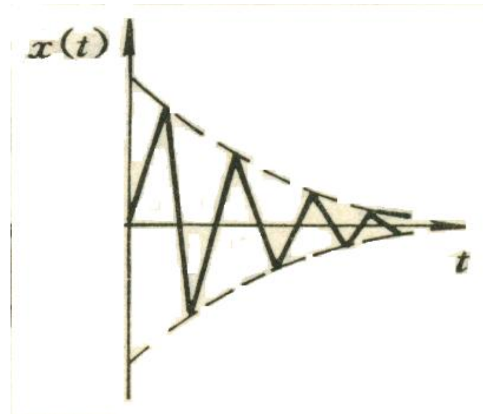
①　准周期信号：由两种以上的周期信号组成，但其组成分量间不存在公共周期，因而无法按某一时间间隔周而复始重复出现。设信号x(t)由两个简谐信号合成，即

$$x(t)=A_1\sin\sqrt{2}\,t+A_2\sin(3t+\theta)$$

可见，两个信号均为简谐信号，即为周期信号，但二者的角频率分别为 $\omega_1=\sqrt{2}$,$\omega_2=3$,其周期 $T_1=\sqrt{2}\,\pi$，$T_2=2\pi/3$，两个周期没有最小公倍数，即角频率的比值为无理数，说明二者之间没有公共周期，所以，信号x(t)是非周期的，但又是由周期信号合成的，故称之为准周期信号。

② 瞬变非周期信号：在一定时间区域内存在，或随着时间的增长而衰减至零的信号。





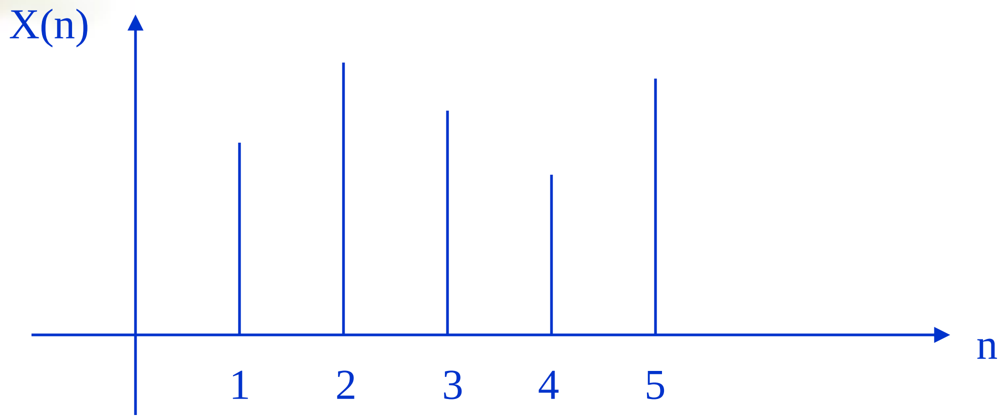
$$x(t)=\begin{cases} A & [t_1 \langle t \langle t_2] \\ 0 & (t_1 \rangle t, t \rangle t_2) \end{cases}$$

$$x(t)=x_0 e^{-at}\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

2、随机信号：是无法用数学解析式来表达的，也无法预见未来任何时刻的瞬时值的信号。由于随机信号具有某些统计特征，可以用概率统计的方法由其过去来估计未来，但它只能近似的描述，存在误差。

3、离散信号的描述方法

①离散图形表示法：



②数字序列表示法：

X(n)	X(n1)	x(n2)	x(n3)	x(n4)	x(n5)
n	1	2	3	4	5

1-3周期信号的频谱分析（频域描述）

一、傅立叶三角级数展式：

根据高等数学知识，周期函数 $x(t)$ 满足狄里和里条件时，可以被分解为：

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \bullet\bullet\bullet$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \qquad \text{（式1—4）}$$

式中： ω_0 为基波角频率， $\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi f_0$ ；

n 为自然数， $n = 1,2,3\bullet\bullet\bullet$

将上式合并同频率项，得

$$x(t) = A_0 + \sum_{N=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \qquad \text{（式1—5）}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \varphi_n = arctg \frac{b_n}{a_n}$$

式（1—4）（1—5）表明周期信号可以用一个常值分量A_0和无限多个谐波分量之和表示。其中$A_1\cos(\omega_0 t-\varphi_1)$为一次谐波分量。基波的频率与信号的频率相同，高次谐波的频率为基频的整数倍。高次谐波又可分为奇次谐波（n为奇数）和偶次谐波（n为偶数），这种把一个周期信号x(t)分解为一个直流分量A_0和无数个谐波分量之和的方法称为傅立叶分析法。

由上面分解的过程可见，只要求得以下三个系数，即可容易地获得周期信号的的傅立叶三角级数展开式。

常值分量：$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt$$

余弦分量幅值：$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\cos n\omega_0 tdt$$

正弦分量幅值：$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\sin n\omega_0 tdt$$

利用信号的奇偶性计算三个系数

- 若 $x(t)$ 为奇函数，即 $x(t)=-x(-t)$ ，则

$$a_0=0 \qquad a_n=0 \qquad b_n\neq 0$$

- 对应的： $x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$

- 若 $x(t)$ 为偶函数，即 $x(t)=x(-t)$ ，则

$$a_0\neq 0 \qquad a_n\neq 0 \qquad b_n=0$$

- 对应的： $x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$

二、周期信号的频谱

1、频谱

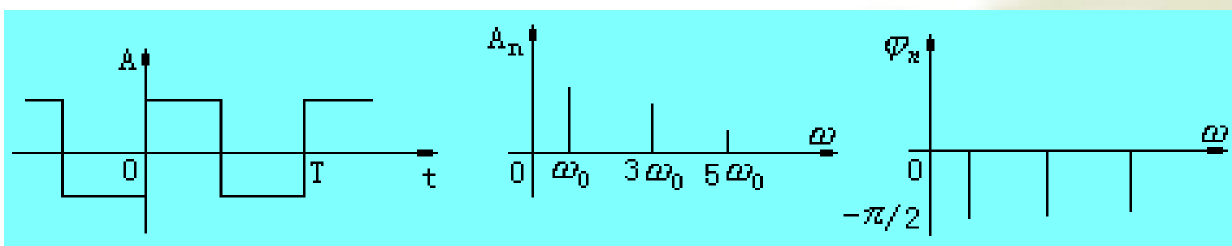
对周期信号进行了傅立叶三角级数展开之后，我们得到了：

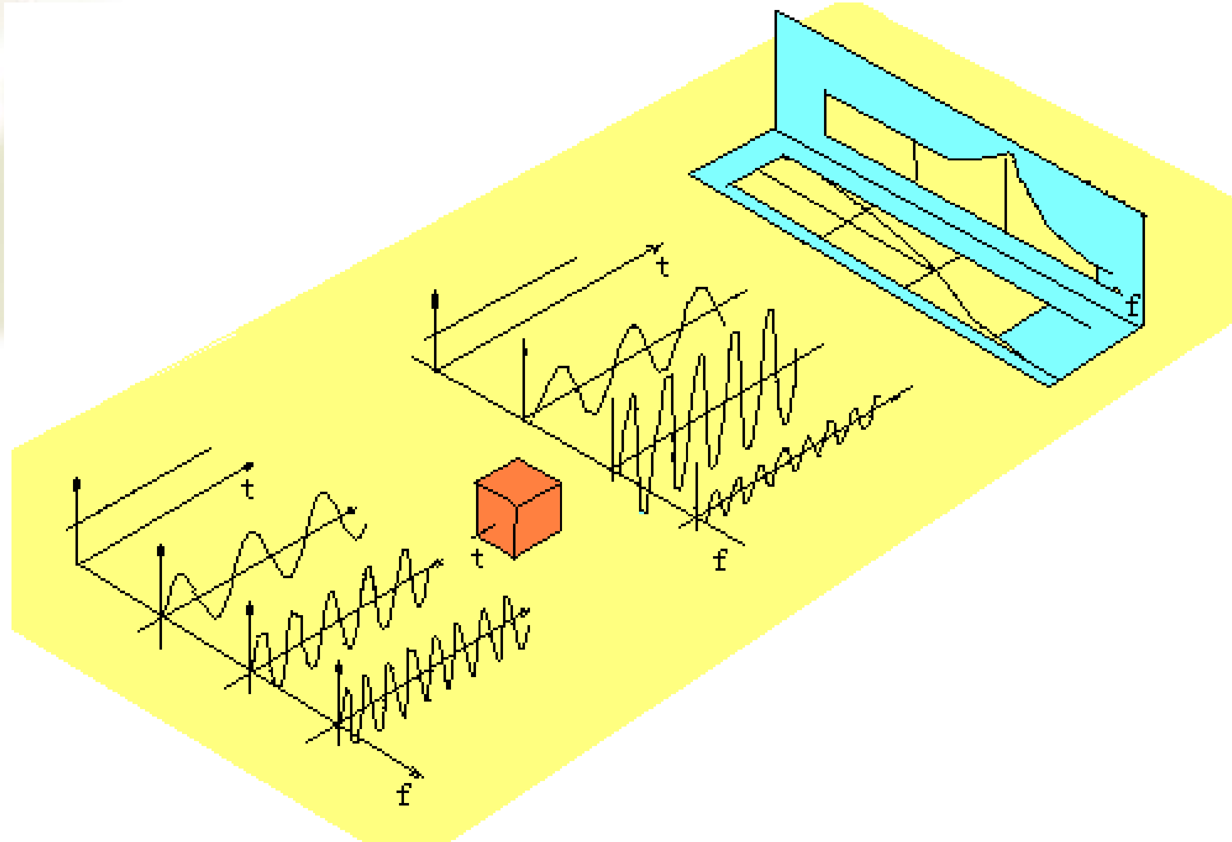
$$x(t) = A_0 + \sum_{N=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \varphi_n = arctg\frac{b_n}{a_n}$$

它表示了该周期信号的频率组成，根据该式可以作出频谱图。频谱图由幅频图和相频图组成，分别表示各分量的幅值、相位与频率的关系。

以周期方波为例，其频谱图如下：




t
t
f
t
f
t
f

2、频谱的特点：

由频谱图可以看出周期信号的频谱具有以下特点：

(1)**离散性**：频谱是由不连续的谱线组成，每条谱线代表一个谐波分量。这种频谱称为离散频谱。

(2)**谐波性**：每条谱线只能出现在基波频率的整数倍。谱线之间的间隔等于基频率的整数倍。

(3)**收敛性**：各频率分量的谱线高度表是该谐波的幅值或相位角工程中常见的周期信号，其谐波幅度总的趋势是随谐波次数的增高而减小的。

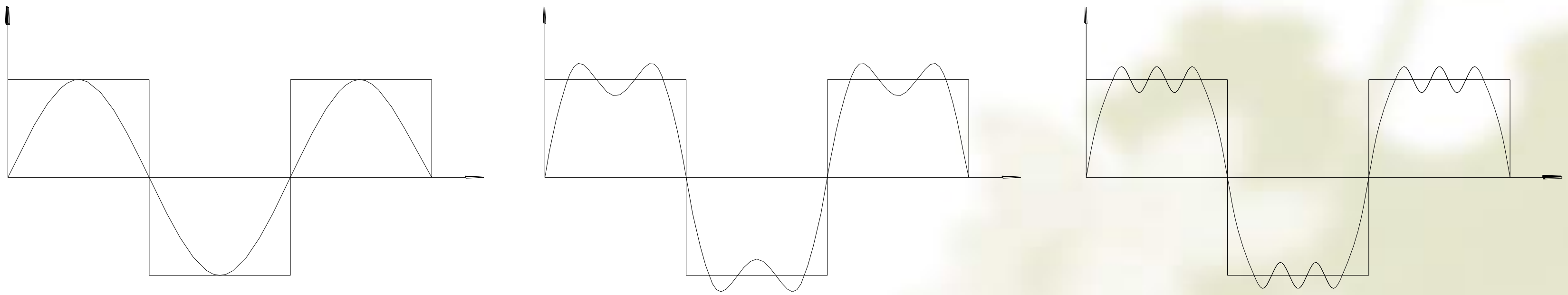
3、取值的多少与信号的频带宽度

因为谐波的幅度总趋势是随谐波次数的增高而减小的，信号的能量主要集中在低频分量，所以谐波次数过高的那些分量，所占能量很少，高频分量可忽略不计。例如,周期方波的取值范围与波形的关系如下:

$$x(t)=\frac{4A}{\pi}\sin\omega_0 t+\frac{4A}{3\pi}\sin 3\omega_0 t+\frac{4A}{5\pi}\sin 5\omega_0 t+\cdots$$

$$=\frac{4A}{\pi}\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})+\frac{4A}{3\pi}\cos(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2})+\frac{4A}{5\pi}\cos(5\omega_0 t-\frac{\pi}{2})+\cdots$$

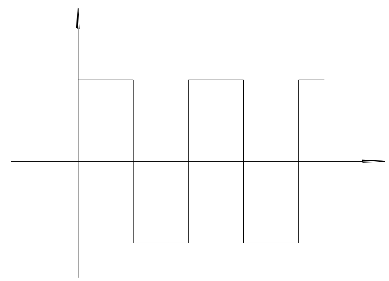
取不同的谐波分量时,近似波形与实际波形的差别:

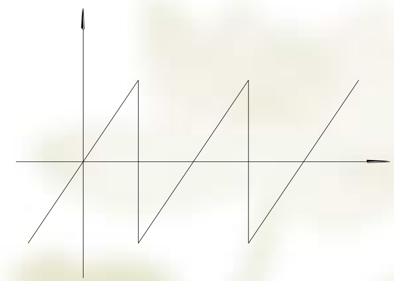


工程上提出了一个信号频带宽度的概念。信号频带的大小与允许误差的大小有关。通常把频谱中幅值下降到最大幅值的1/10时所对应的频率作为信号的频宽，称为**1/10法则**。

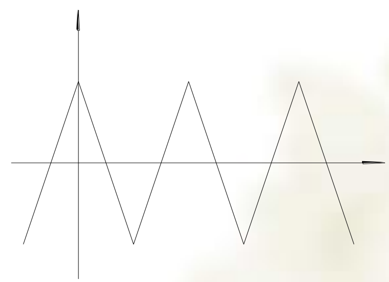
除此之外,还可以根据信号的变化剧烈程度既是否有突变来近似地用下列方法确定信号的频带宽度:

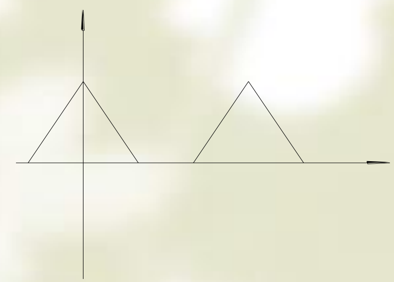
信号波形有突变:　$10\omega_0$





信号波形无突变:　$3\omega_0$





1-4非周期信号的频谱

一、频谱密度函数

当周期信号的周期趋于无限大时，周期信号将演变成非周期信号。因此,借用研究周期信号的方法来研究非周期信号。

傅立叶级数的复指数展开式：

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t \end{cases}$$

两式相加、减后得：

$$\begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ \cos\omega t = \dfrac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{cases}$$

代入周期信号的傅立叶三角级数展开式，有：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) + b_n \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)\right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}\right]$$

令： $C_0 = a_0$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

所以： $$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

将上式第三项中n的取值变成从-1到-∞，则第三项变为：

$$\sum_{n-1}^{\infty} C_{-n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

则：
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \bullet\bullet\bullet)$$

这就是傅立叶级数的复指数展开式。其中 C_n 为复数傅立叶系数。

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

当信号周期T→∞时，$n\omega_0 \to \omega, \omega_0 \to \Delta\omega, \Delta\omega$为无穷小量，即 $n\omega_0$ 的取值间隔为无穷小，所以，$n\omega_0$ 由离散量变成连续量，周期信号变成非周期信号。用 ω 代替 $n\omega_0$ 以及 $T = 2\pi / \omega_0$，则上式为：

当 $T\to\infty,\Delta\omega\to d\omega,\sum\to\int$ ，则有

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

将方括弧中的部分用下式表示，则有

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$ 傅立叶变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ 傅立叶反变换

$X(\omega)$ 表示角频率为 ω 处的单位频带宽度内的频率分量的幅值和相位，称为函数 $x(t)$ 的频率密度函数。频率密度函数为复数：

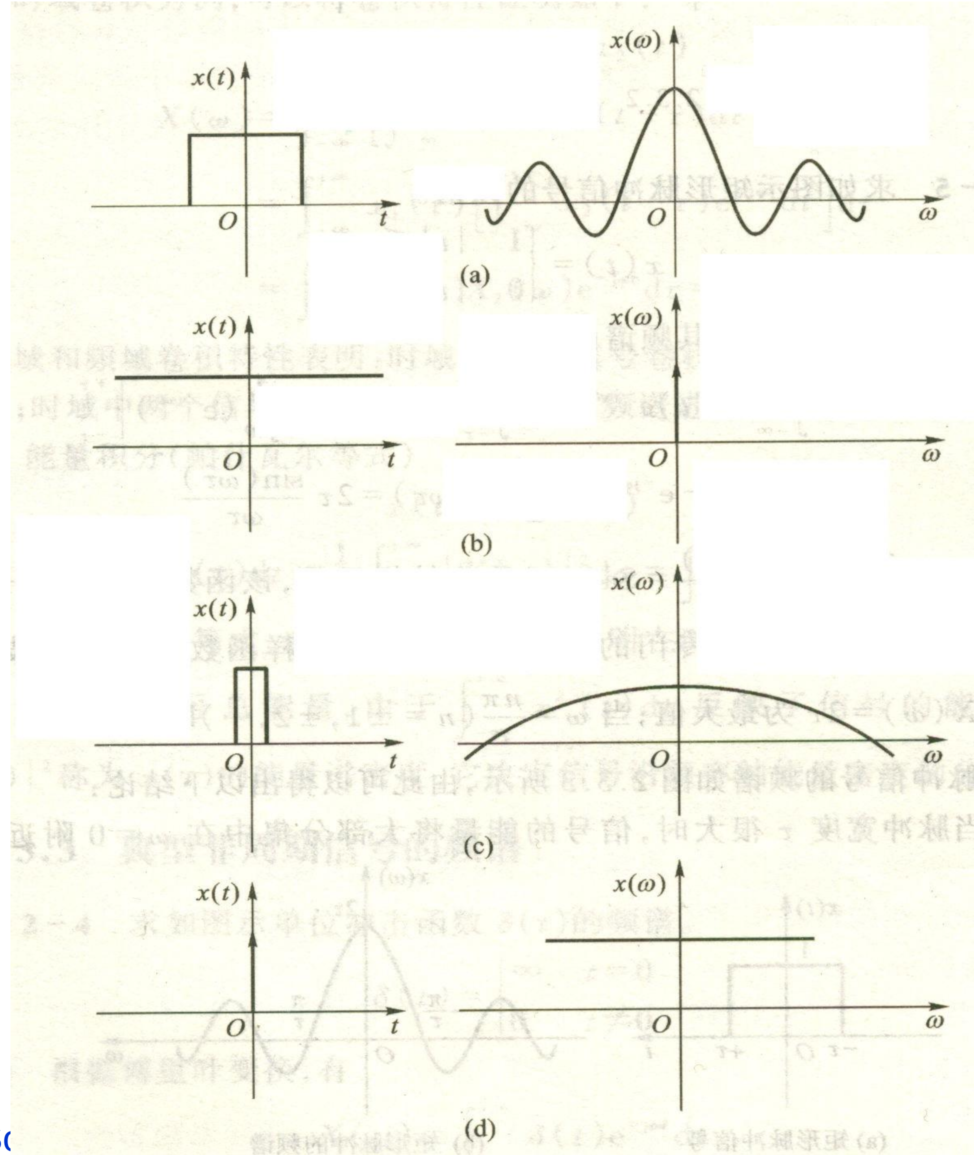
$$X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=X_R(\omega)+jX_I(\omega)$$

$$|X(\omega)|=\sqrt{X_R^2(\omega)+X_I^2(\omega)}$$ 幅频函数

$$\varphi(\omega)=tg^{-1}\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}$$ 相频函数

总之，非周期信号的频谱可由傅立叶变换得到，它是频率的连续函数，故频谱为连续谱。这一点不同于周期信号的频谱。

右图为单脉冲信号宽度与其频谱的关系



二、傅立叶变换的主要性质

1、叠加性

若 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的傅立叶变换分别为 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$，则

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\longleftrightarrow a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

2、对称性

若 $x(t)\longleftrightarrow X(\omega)$, 则 $X(t)\longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

对称性表明：若时域信号 $X(t)$ 与频谱函数 $X(\omega)$ 有相同波形，则 $X(t)$ 的频谱为 $2\pi x(-\omega)$，它与 $x(t)$ 有相似波形。

3、时延特性

若 $x(t)\longleftrightarrow X(\omega)$，则 $x(t-t_0)\longleftrightarrow e^{-j\omega t0}X(\omega)$

时延特性表明：时域信号沿时间轴延迟时间 t_0， 则在频域中乘以因子 $e^{-j\omega t0}$，即减小一个相位角 ωt_0，而频幅特性不变。

4、频移特性

若 $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$, 则$x(t)e^{j\omega t_0} \longleftrightarrow X(\omega-\omega_0)$

频移特性表明：若时域信号x（t）乘以因子 $e^{j\omega t_0}$，则对应的频谱X（ω）将沿频率轴平移 ω_0 。这种频率搬移过程，在电子技术中就是调幅过程。

5、时间尺度特性（或称比例特性）

若$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$，则$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a}X(\frac{\omega}{a})$

时间尺度特性表明：信号在时域压缩a倍（a＞1）时，在频域中频带加宽，幅值压缩1/a倍；反之信号在时域扩展时（a＜1 在频域中将引起频带变窄，但幅值增高。

1-4 随机信号

随机信号不能用确定的数学关系来描述，但服从统计规律，可以用概率统计的特性来描述。

对随机信号按时间历程所作的各次长时间的观测记录称为样本函数。在同样条件下的互不相同的多个样本函数的集合称为总体。

$$\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \bullet\bullet\bullet, x_i(t)\bullet\bullet\bullet\}$$

$\{x(t)\}$ 就表示一个随机过程。

平稳随机过程：统计参数不随时间变化的随机过程。

非平稳随机过程：统计参数随时间变化的随机过程。

一、随机信号的统计参数：

1、均值，表示静态分量

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$x(t)$ －－－－样本函数

T －－－－－－观测时间

2、方差，表示动态分量

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu_x]^2 dt$$

3、均方值，表示随机信号的强度

$$\psi_x^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

二、概率密度函数

它表示信号的量值落在某指定范围内的概率，用来描述随机信号幅值的统计特性。

在记录时间 T 内，信号幅值落在 $(x, x+\Delta x)$ 内的概率为：

$$q=\lim_{T\to\infty}\frac{\Delta t_1+\Delta t_2+\bullet\bullet\bullet}{T}$$

显然，概率 q 的大小与区间宽度 Δx 有关，所以，定义概率密度函数为：

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{q}{\Delta x}$$

三、自相关函数

自相关函数描述信号在一个时刻与另一时刻取值的依赖关系。用下式表示：

$$R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

自相关函数是信号 $x(t)$ 和它的时移信号 $x(t+\tau)$ 乘积的平均值，它是时移变量 τ 的函数。

自相关函数可以用于分析随机信号，也可以用于分析确定信号。

自相关函数的主要特性：

1. 自相关函数为偶函数，即 $R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$ ，其图形对称于纵轴。时移导前或滞后函数值不变。

2. 当 $\tau=0$ 时，自相关函数具有最大值，且等于信号的均方值。

$$R_{xx}(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=\psi_x^2$$

3. 周期信号的自相关函数仍然是周期信号。

周期信号 $x(t)=A\cos(\omega t+\theta)$ 和 $x(t)=A\sin(\omega t+\theta)$ 的自相关函数都是：

$$R_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau$$

4. 若随机信号中不含周期成分，当 τ 趋于无限大时，$R_{xx}(\tau)$ 趋于信号的均值的平方，即：

$$\lim_{\tau\to\infty}R_{xx}(\tau)=\mu_x^2$$

自相关函数的应用

1. 检测信号回声

若宽带信号中存在时间延迟为 τ_0 的回声，则该信号的自相关函数在 $\tau = \tau_0$ 处也达到峰值（另一个峰值在 $\tau = 0$ 处），则可根据 τ_0 确定反射体的位置。

2. 检测淹没在随机噪声中的周期信号

由于随机信号的自相关函数随着延迟时间的增大而趋于零，因此，延迟一定时间后，被干扰信号中只剩下周期信号的信息。